

Séminaire « L'optimisation par essaim de particules (OEP) »

Paris, Carré des Sciences, 2 octobre 2003, http://www.particleswarm.net/oep_2003/

L'essaim de particules vu comme un système dynamique : convergence et choix des paramètres

Ioan Cristian TRELEA

UMR Génie et Microbiologie des Procédés Alimentaires

INA P-G, BP 01, 78850 Thiverval-Grignon

trelea@grignon.inra.fr

Résumé

La convergence de l'algorithme d'optimisation par essaim de particules est analysée en utilisant des résultats classiques de la théorie des systèmes dynamiques. Une carte bidimensionnelle est proposée pour le choix des paramètres de l'algorithme en fonction de la vitesse et du type de convergence désirés. Le compromis exploration – exploitation est discuté et illustré par simulation. Des résultats obtenus sur des fonctions de test sont présentés, pour différentes tailles de l'essaim et différents choix des paramètres.

Mots clé

Optimisation par essaim de particules, optimisation stochastique, algorithme parallèle, analyse des algorithmes

Introduction

L'optimisation par essaim de particules (OEP) est une technique d'optimisation parallèle développée par Kennedy et Eberhart [4], en s'inspirant du comportement social des individus qui ont tendance à imiter les comportements réussis qu'ils observent dans leur entourage, tout en y apportant leurs variations personnelles. A la différence des algorithmes génétiques, qui miment les mécanismes génétiques de l'évolution, l'OEP s'inspire plutôt de la formation d'une culture. Un ouvrage complet sur les racines sociales de l'OEP et les techniques mathématiques mises en œuvre est [5].

L'algorithme OEP est initialisé par une population de solutions potentielles aléatoires, interprétées comme des particules se déplaçant dans l'espace de recherche. Chaque particule est attirée vers sa meilleure position

découverte par le passé ainsi que vers la meilleure position découverte par les particules de son voisinage (ou de tout l'essaim, dans la version globale de l'algorithme).

L'algorithme OEP comprend plusieurs paramètres de réglage qui permettent d'agir sur le compromis exploration – exploitation. L'exploration est la capacité de tester différentes régions de l'espace à la recherche de bonnes solutions candidates. L'exploitation est la capacité de concentrer la recherche autour des solutions prometteuses afin de s'approcher le plus possible de l'optimum. Le choix des paramètres reste en grande partie empirique. Une analyse complète de l'algorithme a été faite par Clerc et Kennedy [2]. Ils ont également proposé un bon jeu de paramètres de réglage, testé par [3].

Le travail présenté ici [6] simplifie l'analyse mathématique de l'algorithme en faisant appel à des résultats bien établis de la théorie des systèmes dynamiques. Il est montré que certains paramètres de l'algorithme n'apportent rien à la flexibilité de la méthode et peuvent être fixés sans perte de généralité. Une carte bidimensionnelle est établie dans l'espace des paramètres, comportant des zones caractéristiques pour le comportement dynamique des particules dans l'essaim, ce qui rend le choix des paramètres plus intuitif. L'utilisation de cette carte est illustrée par des simulations et des exemples de fonctions test rencontrées dans la littérature.

L'algorithme OEP

Algorithme général

L'algorithme OEP classique peut être décrit sous forme vectorielle de la façon suivante :

$$\vec{v}_{k+1} = \vec{a} \otimes \vec{v}_k + \vec{b}_1 \otimes \vec{r}_1 \otimes (\vec{p}_1 - \vec{x}_k) + \vec{b}_2 \otimes \vec{r}_2 \otimes (\vec{p}_2 - \vec{x}_k) \quad (1)$$

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{c} \otimes \vec{x}_k + \vec{d} \otimes \vec{v}_{k+1} \quad (2)$$

Le symbole \otimes signifie ici la multiplication des vecteurs élément par élément. A l'itération k , la vitesse \vec{v}_k d'une particule est modifiée à partir de sa valeur courante, affectée d'un coefficient d'inertie (\vec{a}), et de deux forces qui attirent la particule vers sa propre meilleure position passée (\vec{p}_1) et la meilleure position de tout l'essaim (\vec{p}_2). L'intensité de l'attraction est donnée par les coefficients \vec{b}_1 et \vec{b}_2 . La position de la particule \vec{x}_k est modifiée à partir de la position courante et de la nouvelle vitesse calculée \vec{v}_{k+1} , affectées des coefficients \vec{c} et respectivement \vec{d} . L'expérience montre qu'une bonne exploration du domaine de recherche est obtenue en introduisant les nombres aléatoires \vec{r}_1 and \vec{r}_2 , en général avec une répartition uniforme entre 0 et 1.

Algorithme unidimensionnel déterministe

Chaque coordonnée d'une particule est modifiée indépendamment des autres coordonnées (équations 1 et 2). Le seul lien entre les coordonnées est à travers la fonction objectif, c'est-à-dire à travers les meilleures positions trouvées jusqu'à présent \vec{p}_1 et \vec{p}_2 . Pour les besoins de l'analyse, nous allons donc considérer le déplacement de la particule selon une seule coordonnée.

Une autre simplification consiste à considérer la version déterministe de l'algorithme, ce qui revient à remplacer les nombres aléatoires par leurs valeurs moyennes (1/2). L'analyse de l'algorithme complet (aléatoire) n'a pas encore été réalisée à notre connaissance. Toutefois, les conclusions obtenues dans le cas déterministe restent valables qualitativement, comme le montre un grand nombre de simulations.

Avec ces simplifications, l'algorithme unidimensionnel déterministe s'écrit :

$$v_{k+1} = av_k + b(p - x_k) \quad (3)$$

$$x_{k+1} = cx_k + dv_{k+1} \quad (4)$$

Le nouveau coefficient d'attraction b est la moyenne des coefficients propre (b_1) et social (b_2). Le nouveau point d'attraction p est la moyenne de p_1 et de p_2 , pondérés par b_1 et b_2 respectivement.

Algorithme avec $c = 1$ et $d = 1$

Il a été montré [6] que les coefficients c et d peuvent être toujours choisis de valeur 1, sans perte de généralité. Plus exactement, toute séquence de positions successives $\{x_k\}$ générée par l'algorithme décrit par les équations 3 et 4, peut également être générée en fixant $c = 1$ et $d = 1$ et en choisissant convenablement a et b . Les séquences des vitesses sont bien sûr différentes, mais cela ne change rien au problème d'optimisation, qui ne fait intervenir que les positions successives. Le choix $c = 1$ et $d = 1$ est en partie arbitraire mais a la propriété intéressante que la variable v garde une vraie signification de vitesse, c'est-à-dire de différence entre deux positions successives. Les valeurs des coefficients c et d seront fixées à 1 dans ce qui suit.

Analyse dynamique

Forme matricielle

Les équations 3 et 4 peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$y_{k+1} = Ay_k + Bp \quad \text{avec} \quad y_k = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1-b & a \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dans le langage de la théorie des systèmes dynamiques, y est l'état du système, constitué de la position de la particule et de sa vitesse, A est la matrice dynamique dont les propriétés déterminent le comportement asymptotique de la particule, p l'entrée exogène qui conduit la particule vers la position désirée et B la matrice d'entrée, qui décrit l'effet de l'entrée sur la particule.

Point d'équilibre

Si la particule dont le mouvement est décrit par l'équation 5 a un point d'équilibre, alors il est tel que :

$$y^{eq} = [p \quad 0]^T, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x^{eq} = p \quad \text{et} \quad v^{eq} = 0 \quad (6)$$

ce qui est attendu : la particule est positionnée en p et a une vitesse nulle.

Convergence et oscillations

La théorie des systèmes dynamiques discrets dit que le comportement de la particule dépend des valeurs propres de la matrice A . Les valeurs propres, réelles ou complexes, sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - (a - b + 1)\lambda + a = 0 \quad (7)$$

L'analyse des racines de cette équation en fonction des paramètres a et b conduit à différents comportements possibles : convergent ou divergent, aperiodique ou oscillant, harmonique ou zigzagant. Les domaines correspondants dans le plan (a, b) sont représentés dans la figure 1. Une analyse plus détaillée est donnée dans [6].

Exemples de comportements dynamiques

Dans la pratique, les comportements intéressants sont ceux qui assurent la convergence des particules de l'essaim vers la meilleure solution trouvée. Il convient donc de choisir les paramètres a et b à l'intérieur du triangle représenté dans la figure 1(a). Selon le choix des paramètres a et b à l'intérieur de ce triangle (figure 2) les comportements des particules peuvent être très différents, comme le montre la figure 3. Pour l'optimisation, les choix qui semblent donner les meilleurs résultats sont de type oscillants harmoniques, avec une convergence plus ou moins rapide selon qu'on désire favoriser l'exploration et l'exploitation, figure 3 (a) ou (b).

Expériences d'optimisation

Conditions de test

L'algorithme OEP (équations 1 et 2) a été appliqué à 5 fonctions de test, utilisées également dans [2] et [3]. Les paramètres vectoriels avaient tous les éléments identiques. Deux jeux de paramètres ont été comparés. Le jeu 1 ($a = 0.6$ et $b = 1.7$) a été choisi par l'auteur après un grand nombre d'essais. Le jeu 2 ($a = 0.729$ et $b = 1.494$) a été déterminé par Clerc [1] et testé dans [3] avec de très bons résultats. Les fonctions de test, le nombre de dimensions (n), le domaine de recherche de l'optimum et les valeurs de la fonction objectif pour que l'optimisation soit considérée comme réussie sont donnés dans le tableau 1.

Le nombre d'itérations pour atteindre la valeur désirée de la fonction objectif a été enregistré. Le nombre maximal a été limité à 10000. Chaque expérience d'optimisation a été réalisée 20 fois, avec des valeurs initiales de x et de v dans le domaine $[x_{\min}, x_{\max}]$ indiqué dans le tableau 1. La topologie de l'essaim était totalement connectée, toutes les particules étant considérées voisines. Des essais de $N = 15, 30$ et 60 particules ont été testés. Pendant l'optimisation, ni la position ni la vitesse des particules n'ont été limitées.

Résultats et discussion

Effet du nombre de particules dans l'essaim (N)

Dans la plupart des cas, le fait d'augmenter le nombre des particules dans l'essaim a diminué le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre l'objectif, comme indiqué dans le tableau 2. Le taux de succès de

l'algorithme, défini comme le rapport entre le nombre de fois où l'objectif a été atteint et le nombre total d'essais d'optimisation dans les conditions considérées, a été également amélioré par l'augmentation de N . Cela est normal, puisque plus de particules échantillonnent mieux l'espace de recherche. Toutefois, plus de particules demandent plus d'évaluations de la fonction objectif. Or, dans les applications réelles, le coût de l'évaluation de la fonction objectif est en général dominant. Le critère de performance retenu pour l'algorithme a été le nombre attendu d'évaluations de la fonction objectif, car il prend en compte à la fois le nombre de particules, le nombre d'itérations et le taux de succès (tableau 2).

Les meilleurs résultats en termes de nombre attendu d'évaluations de la fonction objectif ont été obtenus avec un nombre de particules intermédiaire, sauf pour la fonction de Rosenbrock. Une valeur de N trop faible diminue le taux de succès et augmente le nombre d'itérations. Une valeur trop élevée demande trop d'évaluations de la fonction de coût à chaque itération.

Effet des paramètres a et b

Le jeu de paramètres 1 a une vitesse de convergence supérieure au jeu 2 (figure 2, droite). Le jeu 1 favorise donc l'exploitation par rapport à l'exploration de l'espace. Le nombre d'itérations avec le jeu 1 a été en général plus réduit, mais le risque de converger prématurément vers un point non optimal a été plus élevé, d'où un taux de succès plus faible (tableau 2). Le nombre d'itérations plus faible a contrebalancé ou non le taux de succès plus faible suivant la nature de la fonction objectif et le nombre de particules. Dans la plupart des cas, le nombre attendu d'évaluations de la fonction objectif le plus réduit a été obtenu avec le jeu 1, sauf pour la fonction de Griewank.

Il faut toutefois remarquer que la vitesse de convergence n'est pas le seul facteur important. Le fait de se déplacer selon les courbes d'égale vitesse de convergence (figure 2, droite) ne donne pas du tout des résultats similaires. La trajectoire de convergence, figure 3, est tout aussi importante. Pour $N = 30$, l'auteur a obtenu de bons résultats avec des paramètres choisis dans le petit triangle hachuré représenté dans la figure 2, gauche. La signification de ce triangle n'est pas claire pour l'instant.

Effet de la fonction objectif

Dans tous les cas, le minimum global était le seul qui permettait d'atteindre l'objectif et était situé près du centre du domaine de recherche. Les fonctions Sphère et Rosenbrock ont un seul minimum, tandis que les autres fonctions ont de multiples minima locaux (tableau 1). Les fonctions de Rastrigin et de Griewank ont une courbure à grande échelle qui guide la recherche vers l'optimum global. La fonction de Schaffer est pratiquement plate en dehors de la région de l'optimum global. Il est donc normal que le taux de succès le plus élevé ait été obtenu pour les fonctions Sphère et Rosenbrock et le taux le plus faible pour la fonction de Schaffer.

Dans la plupart des cas, l'impossibilité d'atteindre l'objectif a été due à une convergence prématurée vers un optimum local. Avec la combinaison d'un jeu de paramètres à convergence rapide (le jeu 1) et un nombre réduit de particules ($N = 15$), la convergence a parfois eu lieu vers des points complètement arbitraires, comme illustré par un taux de succès faible pour les fonctions Sphère et Rosenbrock, qui n'ont pourtant pas d'optima locaux.

Conclusion

Le comportement dynamique et la convergence de la version simplifiée (déterministe) de l'algorithme OEP ont été analysés en utilisant des résultats classiques de la théorie des systèmes dynamiques discrets. Cette analyse conduit à des règles intuitives pour le choix des paramètres de l'algorithme, sur une carte à deux dimensions. Des essais numériques ont confirmé la validité qualitative de ces règles pour le cas général de l'algorithme stochastique.

L'analyse rigoureuse de l'algorithme stochastique et du rôle de la topologie de l'essaim restent des problèmes ouverts.

Références bibliographiques

- [1] Clerc, M. The swarm and the queen: towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization. Proceedings ICEC 1999, pp. 1951-1957, Washington DC.
- [2] Clerc, M. and Kennedy, J. The particle swarm: explosion stability and convergence in a multi-dimensional complex space. IEEE Transactions on Evolutionary Computation 6(1), 2002, pp. 58-73.
- [3] Eberhart, R.C. and Shi Y. Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization. Proceedings CEC 2000, pp. 84-88, San Diego, CA.
- [4] Kennedy, J. and Eberhart, R.C. Particle swarm optimization. Proceedings of the IEEE conference on Neural Networks, IV, 1995, pp. 1942-1948, Piscataway, NJ.
- [5] Kennedy, J., Eberhart, R.C. and Shi Y. Swarm intelligence. 2001, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco.
- [6] Trelea I.C. 2003. The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection. Information Processing Letters, 85, pp. 317-325.

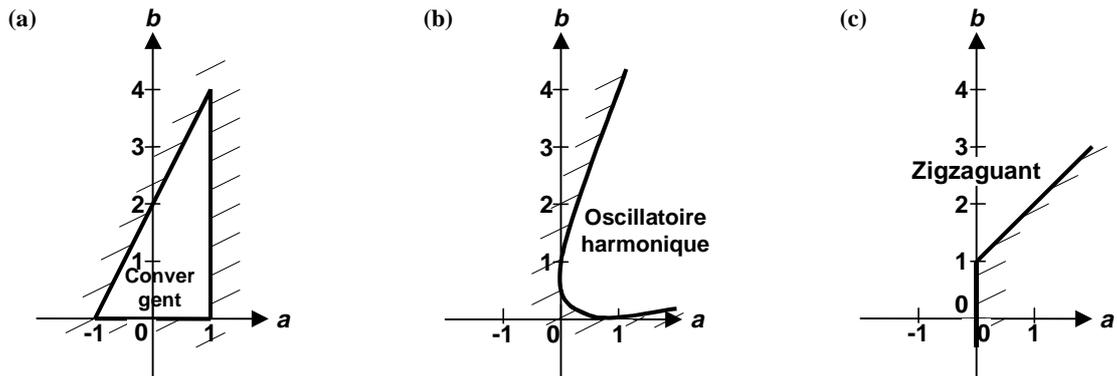


Figure 1. Domaines de comportement dynamique dans l'espace des paramètres (a, b) . (a) Domaine de convergence. (b) Domaine des oscillations harmoniques. (c) Domaine de comportement zigzaguant.

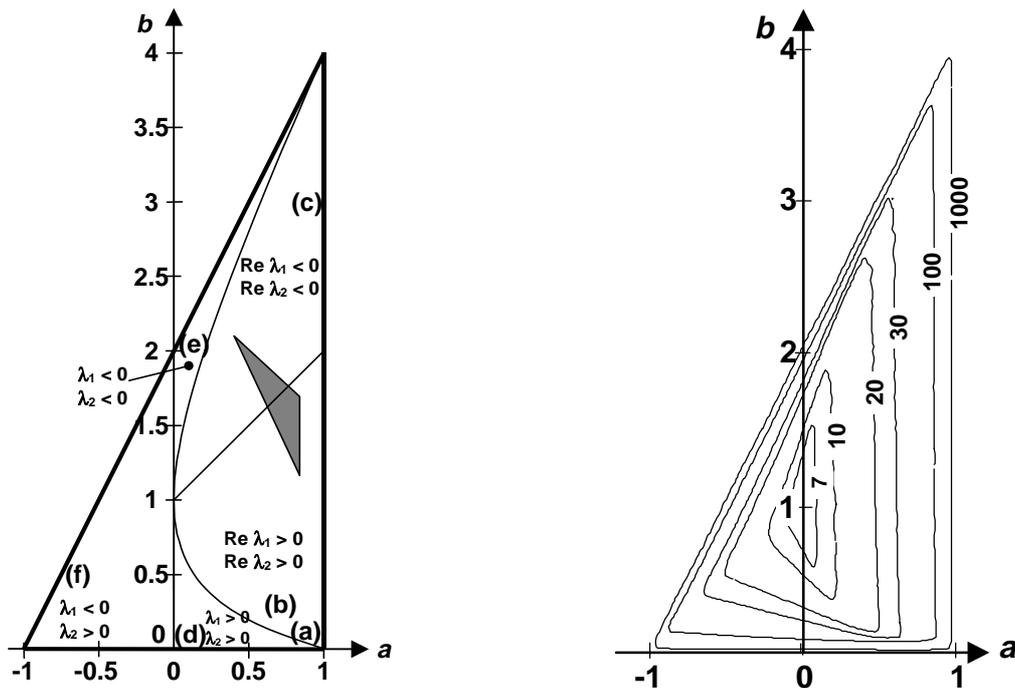


Figure 2. **Gauche:** Position de quelques jeux de paramètres typiques dans l'espace des paramètres (a, b) . Les points marqués (a) à (f) correspondent aux simulations dans la figure 3. Le triangle hachuré correspond à des jeux de paramètres qui ont donné de bons résultats pour les fonctions de test mentionnées dans le chapitre « Expériences d'optimisation ». **Droite:** Contours d'égale vitesse de convergence. Les contours sont étiquetés par le nombre d'itérations nécessaires pour réduire la distance au point d'équilibre d'un facteur 1000.

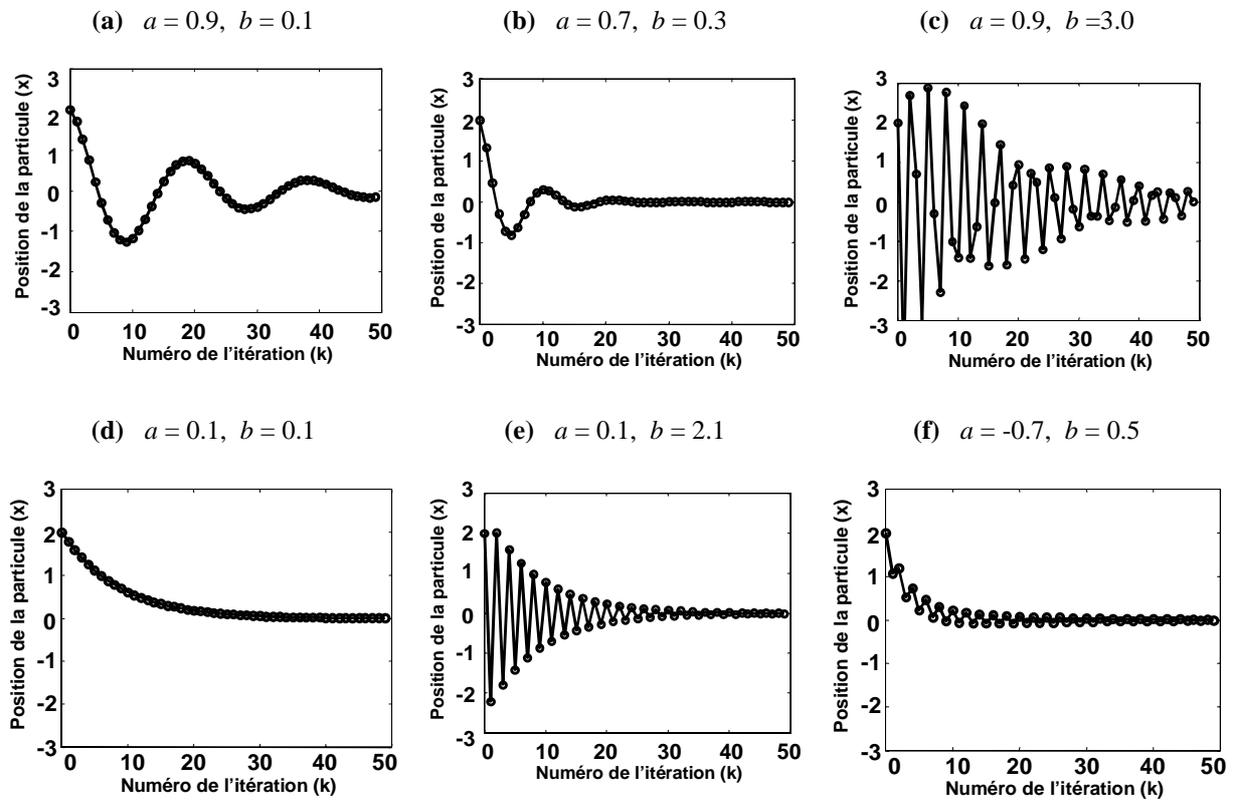


Figure 3. Exemples de comportements dynamiques d'une seule particule pour différents choix des paramètres a et b . (a) Oscillations harmoniques avec convergence lente. (b) Oscillations harmoniques avec convergence rapide. (c) Oscillations harmoniques zigzagantes. (d) Convergence aperiodique. (e) Zigzags symétriques. (f) Zigzags asymétriques.

Tableau 1. Fonctions objectif pour les essais d'optimisation

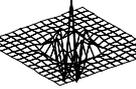
Nom	Formule	Dim. n	Domaine $[x_{\min}, x_{\max}]$	Opti- mum de f	Objectif pour f	Croquis 2D
Sphère	$f_0(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2$	30	$[-100, 100]^n$	0	0.01	
Rosenbrock	$f_1(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} (100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2)$	30	$[-30, 30]^n$	0	100	
Rastrigin	$f_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10)$	30	$[-5.12, 5.12]^n$	0	100	
Griewank	$f_3(\vec{x}) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	30	$[-600, 600]^n$	0	0.1	
Schaffer f6	$f_6(\vec{x}) = 0.5 - \frac{(\sin \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2}{(1 + 0.001(x_1^2 + x_2^2))^2} - 0.5$	2	$[-100, 100]^2$	0	10^{-5}	

Tableau 2: Performances de l'algorithme OEP

Jeu de paramètres 1: $a = 0.6$ et $b = 1.7$. Jeu de paramètres 2: $a = 0.729$, $b = 1.494$.

Fonction	Nombre de particules s	Nombre d'itérations pour atteindre d'objectif								Taux de succès ^a d'évaluations de la fonction objectif ^b			
		Moyenne		Médiane		Minimum		Maximum		Jeu 1		Jeu 2	
		Jeu 1	Jeu 2	Jeu 1	Jeu 2	Jeu 1	Jeu 2	Jeu 1	Jeu 2	Jeu 1	Jeu 2	Jeu 1	Jeu 2
Sphère	(N)												
	15	769	764	722	731	523	586	1 377	1 275	0.40	1	28 838	11 460
	30	344	395	333	395	266	330	457	572	1	1	10 320	11 850
	30 ^c	—	530	—	525	—	495	—	573	—	1	—	15 900
60	252	314	252	313	214	269	309	368	1	1	15 120	18 840	
Rosenbrock	15	531	1 430	523	729	413	452	695	9 476	0.50	1	15 930	21 450
	30	614	900	383	408	239	298	3 718	4 642	1	1	18 420	27 000
	30 ^c	—	669	—	621	—	402	—	1 394	—	1	—	20 070
	60	337	611	284	311	189	219	916	4 450	1	1	20 220	36 660
Rastrigin	15	172	299	147	292	102	152	308	523	0.35	0.80	7 371	5 606
	30	140	182	128	174	104	123	208	299	0.90	0.95	4 667	5 747
	30 ^c	—	213	—	200	—	161	—	336	—	1	—	6 390
	60	122	166	116	164	84	119	168	214	0.95	1	7 705	9 960
Griewank	15	689	755	580	608	443	470	1 589	1 755	0.35	0.60	29 529	18 875
	30	313	365	304	361	257	319	401	455	0.90	0.90	10 433	12 167
	30 ^c	—	313	—	308	—	282	—	366	—	1	—	9 390
	60	226	287	224	280	202	266	250	328	0.95	1	14 274	17 220
Schaffer	15	583	1 203	138	126	63	91	3 706	5 853	0.45	0.40	19 433	45 112
	30	161	350	120	157	74	102	595	1 264	0.75	0.60	6 440	17 500
	30 ^c	—	532	—	321	—	94	—	2 046	—	1	—	15 960
	60	169	319	91	119	40	83	854	2 361	0.90	0.95	11 267	20 147

^a Fraction du nombre d'essais d'optimisation dans lesquels l'objectif a été atteint.

^b (Nombre de particules dans l'essaim) \times (Nombre moyen d'itérations) / (Taux de succès)

^c Meilleurs résultats donnés par Eberhart et Shi [3]. Obtenus avec $N = 30$, $a = 0.729$, $b = 1.494$ et vitesse limitée à $[x_{\min}, x_{\max}]$.